Introduktion til MatModel - E2007

Søren Løbner, 20050677 *

23. november 2007

Aflevering 2

*lobner@daimi.au.dk

Afleveringsopgave fra ugeseddel 3

Antag at en ærlig mønt kastes igen og igen indtil man har set enten to plat (P) eller to krone (K) i træk. Antag ligeledes, at kastene er uafhængige. Lad X betegne antallet af kast der foretages og bemærk at X kan antage værdierne $2, 3, \ldots$

Beregn $P(X = n)$ for $n = 2, 3, \ldots$

Lad $Y_i \in P, K$ være uafhængige og identiske fordelte

$$
\begin{aligned}
&P(Y = P) = P(Y = K) = \frac{1}{2} \\
&\text{Lad:} \quad \{V_{KK} = n\} = \{Y_n = K, Y_{n-1} = K, (Y_i, Y_{i-1}) \neq (K, K) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{for} \quad \forall i = 1, \ldots, n-2\} \\
&\text{Lad:} \quad \{V_{PP} = n\} = \{Y_n = P, Y_{n-1} = P, (Y_i, Y_{i-1}) \neq (P, P) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{for} \quad \forall i = 1, \ldots, n-2\}
\end{aligned}
$$

For $n = 2$

Udfaldsrummet for $n = 2$ kaldet E_2 er givet ved:

$$E_2 = \{V_{ij} = 2 \mid i = K, P, \ j = K, P\} = \{(K, K), (P, P), (P, K), (K, P)\}$$

Da fås: $\quad A_2 = \{(K, K), (P, P)\}$

Nu kan man se at $\#E_2 = 2^2 = 4$ og at $\#A_2 = 2$
Det giver sandsynligheden:

$$P(X = 2) = \frac{\#A_2}{\#E_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

For $n = 3$

Udfaldsrummet for $n = 3$ kaldet E_3 er givet ved:

$$E_3 = \{V_{ij} = 3 \mid i = K, P, \ j = K, P\}$$

Da er de eneste to kombinationer som ender i (K, K) eller (P, P) givet ved:

$$A_3 = \{(P, K, K), (K, P, P)\}$$

Så ved vi at: $\#E_3 = 2^3 = 8$ og at $\#A_3 = 2$
Det giver sandsynligheden:

$$P(X = 3) = \frac{\#A_3}{\#E_3} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

For $n = 4$

Og ligeså er udfaldsrummet for $n = 4$ kaldet E_4 givet ved:

$$E_4 = \{V_{ij} = 4 \mid i = K, P,\ j = K, P\}$$

Da fås: $A_4 = \{(K, P, K, K), (P, K, P, P)\}$

Deraf fås at $\#E_4 = 2^4 = 16$ og at $\#A_4 = 2$
Det giver sandsynligheden:

$$P(X = 4) = \frac{\#A_4}{\#E_4} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

For et vilkårligt n

Nu kan man se et mønster i opførslen, så vi ved at der altid kun vil være to tupler som ender på $(\dots, K, K)$ eller $(\dots, P, P)$ og at:

$$A_n = \{V_{KK} = n\} \cup \{V_{PP} = n\}$$
$$E_n = \{V_{ij} = n \mid i = K, P,\ j = K, P\}$$

Da er antal gunstige og antal mulige for et vilkårligt n givet som:

$$\#A_n = 2$$
$$\#E_n = 2^n$$

Og sandsynligheden $P(X = n)$ er da givet ved:

$$P(X = n) = \begin{cases} \frac{2}{2^n} & \text{for } n \in \{2, 3, \dots\} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$