# Introduktion til MatModel - E2007

Søren Løbner, 20050677 *

12. december 2007

**Aflevering 4**

*lobner@daimi.au.dk

**Afleveringsopgave fra ugeseddel 5**

Vi har at $(X, Y)$ er en diskret stokastisk vektor, hvor $p_{X,Y}$ er givet ved

$$P(X = x, Y = y) = p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^y}{y!} & \text{hvis } x \in \{-1, 0, 1\} \wedge y \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

(**1**) I første opgave skal vi bestemme support af $p_{X,Y}$ som er givet ved:

$$supp\ p_{X,Y} = \{(x, y) \mid (x = -1, 0, 1), (y = 0, 1, 2, \dots)\} \tag{1}$$

den skitseres som følgende:

(se vedhæftet tegning)

(**2**) Og i opgave 2 vil redegøre for sandsynlighedsfunktionerne: I $P(X = x)$ kan vi se at sandsynlighedsfunktionen er givet som $\frac{1}{3}$ når $x \in \{-1, 0, 1\}$. Det er givet da vi fra lign. 5.19 i afsnittet om marginal fordeling af diskrete stokastiske vektorere, ved at $p_X(x)$ er givet ved summationen

$$\sum_{x_2} p_{(x_1,x_2)}(x_1, x_2) \tag{2}$$

og hvis vi laver den summering over vores begingelser for $x$ får vi følgende:

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \sum_{y=0}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^y}{y!} && \text{når} \quad x \in \{-1, 0, 1\} \qquad (3) \\ &= \frac{1}{3} e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} && \text{når} \quad x \in \{-1, 0, 1\} \end{aligned}$$

Og af side 135 i IPT ses at den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{når} \quad x \in \mathbb{R}$$

har summen $e^x$ og dermed fås at:

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \frac{1}{3} \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} \qquad (4) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Og for 0-tilfældet: Hvis $x \notin \{-1, 0, 1\}$ så findes der ikke et $y$ med $(x, y) \in supp\ p_{X,Y}$ og dermed er $P_X(x) = 0$ for alle $x \notin \{-1, 0, 1\}$ Så har vi vist at:

$$P(X = x) = p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{hvis } x \in \{-1, 0, 1\} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \tag{5}$$

Og dermed til næste sandsynlighedsfunktion.
Af ligning 5.20 i IPT s.33 fås at:

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \sum_x \frac{1}{3} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^y}{y!} && \text{når} \quad y \in \{,0,1,2,\dots\} && (6) \\ &= 3\left(\frac{1}{3} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^y}{y!}\right) && \text{når} \quad y \in \{,0,1,2,\dots\} \\ &= e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^y}{y!} && \text{når} \quad y \in \{,0,1,2,\dots\} \end{aligned}$$

Og for 0-tilfældet: Hvis $y \notin \{0, 1, 2, \dots\}$ så findes der ikke et $x$ med $(x, y) \in$ *supp* $p_{X,Y}$ og dermed er $P_Y(y) = 0$ for alle $y \notin \{0, 1, 2, \dots\}$ Så har vi vist at:

$$P(Y = y) = p_Y(y) = \begin{cases} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^y}{y!} & \text{hvis } y \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \tag{7}$$

(**3**) Vi skal vise at $P(X = Y) = \frac{2}{3}e^{-1}$ under antagelssen af at $\lambda = 1$
For $\lambda = 1$ fås at

$$p_{X,Y}(y, y = \frac{1}{3}e^{-1} \cdot \frac{1}{y!} \quad \text{for} \quad y \in \{0, 1\} \tag{8}$$

Vi ser på tilfældet når $x = y = 0$ og $x = y = 1$

Da hændelserne er disjunkte og uafhænige fås at:

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= P(\{X = 0\} \cap \{Y = 0\} \uplus \{X = 1\} \cap \{Y = 1\}) && (9) \\ &= P(X = 0)P(Y = 0) + P(X = 1)P(Y = 1) \\ &= \frac{1}{3} \cdot e^{-1} + \frac{1}{3} \cdot e^{-1} \\ &= \frac{2}{3} \cdot e^{-1} \end{aligned}$$