Introduktion til MatModel - E2007

Søren Løbner, 20050677 *

19. december 2007

Aflevering 6

*lobner@daimi.au.dk

Afleveringsopgave fra ugeseddel 7

Lad X_1 og X_2 være uafhængige og identisk fordelte diskrete stokastiske variable, med sandsynlighedsfunktionen:

$$p_{X_i}(x) \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{hvis } x \in \{0,1,2\} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \tag{1}$$

Beregn $P(X_1 = X_2)$

Vi definere mængden A som følger:

$$A = \{(x_1, x_2) | x_1 = x_2 = 0, 1, 2\} = \{(0,0), (1,1), (2,2)\}$$

så har vi at

$$\{X_1 = X_2\} = \{(X_1, X_2) \in A\}$$

så har vi fra lign. 5.15 i IPT, Σ-funktionen som siger:

$$P(\mathbf{X} \in A) = \sum_{x \in A \cap supp(p)} p(x) \tag{2}$$

Og da det som defineret i (1) gælder at alle $x > 0$ så indgår de alle i supporten, og vi kan derfor lave følgende tabel. Fordi ifølge teorem 5.15 så ses det at der for sandsynligheds funktionen for en 2-dimentional diskret stokastisk vektor, kan opstilles en tabel. I vores tilfælde bliver tabellen med $\frac{1}{3}$ på alle indgangene.

	0	1	2
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Da der er tale om uafhænige og identiske fordelte diskrete variable, indsætter vi sandsynlighederne i Σ-funktionen fra (2) og det følger derefter at:

$$\begin{aligned} P(X_1 = X_2) &= p_{(X_1,X_2)}(0,0) + p_{(X_1,X_2)}(1,1) + p_{(X_1,X_2)}(2,2) \\ &= p_{(X_1)}(0) \cdot p_{(X_2)}(0) + p_{(X_1)}(1) \cdot p_{(X_2)}(1) + p_{(X_1)}(2) \cdot p_{(X_2)}(2) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{3}$$

Det er på grund af teorem 5.45 om uafhængighed, at vi kan udføre omskrivningen fra linje 1 til 2, i ligningen ovenover.

Beregn $P(X_1 < X_2)$

Vi følger her samme fremgangsmåde, og får opstillet følgende:

$$\begin{aligned}P(X_1 < X_2) &= p_{(X_1,X_2)}(0,1) + p_{(X_1,X_2)}(0,2) + p_{(X_1,X_2)}(1,2)\\ &= p_{(X_1)}(0)\cdot p_{(X_2)}(1) + p_{(X_1)}(0)\cdot p_{(X_2)}(2) + p_{(X_1)}(1)\cdot p_{(X_2)}(2)\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\\ &= \frac{1}{3} \qquad (4)\end{aligned}$$

Beregn $P(X_1 > X_2)$

Og videre i samme stil:

$$\begin{aligned}P(X_1 > X_2) &= p_{(X_1,X_2)}(2,0) + p_{(X_1,X_2)}(2,1) + p_{(X_1,X_2)}(1,0)\\ &= p_{(X_1)}(2)\cdot p_{(X_2)}(0) + p_{(X_1)}(2)\cdot p_{(X_2)}(1) + p_{(X_1)}(1)\cdot p_{(X_2)}(0)\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\\ &= \frac{1}{3} \qquad (5)\end{aligned}$$

Og opnår som det ses, samme resultat i de tre sandsynligheder.

—

Vis at $Var(X_1) = \frac{2}{3}$

Vi har i IPT Definition 6.8 og IPT (6.20) variansen givet som:

$$Var(X) = E\left\{(X - EX)^2\right\} = EX^2 - (EX)^2 \qquad (6)$$

så derfor finder vi først middelværdien. Og den er defineret i IPT (6.1) som:

$$EX = \sum_{i=0}^{n} x_i p_X(x_i) \qquad (7)$$

Så for vores X_1 kommer Σ-funktionen i (6) og dermed, middelværdien E, til at være følgende:

$$\begin{aligned}EX_1 &= \sum_{i=0}^{2} x_i p_{X_1}(x_i)\\ &= 0\cdot p_{X_1}(0) + 1\cdot p_{X_1}(1) + 2\cdot p_{X_1}(2)\\ &= 0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\\ &= 1 \qquad (8)\end{aligned}$$

Men som vi kan se i (6) skal vi også bruge EX^2 for at kunne beregne variansen. Den finder vi herefter således:

$$\begin{aligned} EX_1^2 &= \sum_{i=0}^{2} x_i^2 p_{X_1}(x_i) \\ &= 0^2 \cdot p_{X_1}(0) + 1^2 \cdot p_{X_1}(1) + 2^2 \cdot p_{X_1}(2) \\ &= 0 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned} \tag{9}$$

Herefter har vi variansen til:

$$\begin{aligned} Var(X_1) &= EX_1^2 - (EX_1)^2 \\ &= \frac{5}{3} - (1)^2 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned} \tag{10}$$

Vis at $Cov(-5X_1, X_1 + X_2) = -\frac{10}{3}$

Vi har i IPT (6.25) og (6.26) hvad vi skal bruge:

$$\begin{array}{ll} (6.23) & Cov(X,Y) = E(XY) - EXEY \\ (6.25) & Cov(aX, bY) = ab \cdot Cov(X,Y) \\ (6.26) & Cov(X, Y+Z) = Cov(X,Y) + Cov(X,Z) \end{array}$$

Ved at i første omgang at anvende (6.25) får vi:

$$Cov(-5X_1, X_1 + X_2) = -5 \cdot Cov(X_1, X_1 + X_2)$$

Og på det resultat anvender vi derefter (6.26) og på det resultat anvendes (6.23) hvilket giver $Var(X_1)$ og får følgende:

$$\begin{aligned} -5 \cdot Cov(X_1, X_1 + X_2) &= -5 \cdot Cov(X_1, X_1) + Cov(X_1, X_2) \\ &= -5 \cdot E(X_1X_1) - EX_1EX_1 + Cov(X_1, X_2) \\ &= -5 \cdot E(X_1)^2 - (EX_1)^2 + Cov(X_1, X_2) \\ &= -5 \cdot Var(X_1) + Cov(X_1, X_2) \end{aligned}$$

Da X_1 og X_2 er uafhængige fås, iflg. (6.27), $Cov(X_1, X_2) = 0$

$$\begin{aligned} &= -5 \cdot Var(X_1) + 0 \\ &= -5 \cdot \frac{2}{3} \\ &= -\frac{10}{3} \end{aligned} \tag{11}$$