OBLIGATORISK OPGAVE

`Matematisk Programmering`
`Niels Lauritzen`
`26.10.2007`

FORMALIA

Den obligatoriske opgave afleveres (på papirform) den 26.11.2007 inden klokken 12 middag i Informationen på Institut for Matematiske Fag.

(i) For sent afleverede besvarelser vil ikke blive rettet.

(ii) Det er tilladt at arbejde sammen i grupper om løsningen af opgaven, men selve besvarelsen er individuel og skal være selvstændigt indskrevet.

Temaet for opgaven er "column generation" i lineær programmering. Den nødvendige teori er beskrevet i §6.2 i *Introduction to Linear Optimization* (ILO).

OPGAVE

En tæppefabrik producerer store tæpperuller med en bredde på 1000 cm. Fabrikken har 4 forretninger A, B, C og D som kunder. Forretning A ønsker 97 ruller med en bredde på 450 cm, B vil have 610 ruller med en bredde på 360 cm, C ønsker 395 ruller med en bredde på 310 cm og D vil have 211 ruller med en bredde på 140 cm.

Den store rulle med en bredde på 1000 cm kan skæres ud i mindre stykker efter ønskerne fra A, B, C og D. F.eks. kan en stor rulle bruges til at skære 1 rulle ud til A samt 3 ruller til D ved at bruge $(450 + 3 \cdot 140)$ cm $= 870$ cm med en rest på 130 cm. Vi noterer denne udskæring af en stor rulle som

$$(1, 0, 0, 3)$$

i og med at vi har skåret 1 rulle ud til A, 0 til B, 0 til C samt 3 til D ud af en stor rulle. Bemærk at $(1, 0, 0, 2)$ også betragtes som en udskæring. Det er i fabrikkens interesse at minimere antallet af store ruller den skal bruge for at levere de ønskede ruller til A, B, C og D.

OPGAVE 1

På formen (a, b, c, d), hvor a, b, c, d er ikke-negative heltal, opfylder et udskæringsmønster

$$450\, a + 360\, b + 310\, c + 140\, d \leq 1000.$$

Opskriv samtlige udskæringsmønstre.

OPGAVE 2

Giv en kort redegørelse (med egne ord, ikke bogens!) for hvordan det lineære program (6.4) i §6.2 i ILO fremkommer. Benyt enten `CPLEX` eller `OPL` til at vise at det lineære program (6.4) i §6.2 i ILO med tæppefabrikkens data giver et optimum på 452.25 ruller. Udskrift med program og output ønskes vedlagt opgaven.

OPGAVE 3

Vis hvordan den optimale løsning i Opgave 2 kan benyttes til at finde en optimal løsning med det ekstra krav at koordinaterne skal være heltal.

Et *knapsack problem* er et optimeringsproblem på formen

$$\begin{array}{ll} \max & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{givet} & a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \le b \\ & x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}, \end{array} \qquad (*)$$

hvor $c_1, \ldots, c_n, a_1, \ldots, a_n, b$ er positive reelle tal.

OPGAVE 4

Knapsack problemet ovenfor indeholder også problemet, hvor cost vektoren $(c_1, \ldots, c_n)$ består af vilkårlige reelle tal. Hvorfor kan man nøjes med at se på tilfældet, hvor $c_1, \ldots, c_n$ er positive?

OPGAVE 5

En brugbar løsning $(x_1, \ldots, x_n)$ til $(*)$ kaldes *halemaksimal*, hvis

$$(x_1, \ldots, x_n + 1)$$

ikke er brugbar. Opskriv de halemaksimale brugbare løsninger til knapsack problemet

$$\begin{array}{ll} \max & 4\,x_1 + 5\,x_2 + 5\,x_3 + 2\,x_4 \\ \text{givet} & 33\,x_1 + 49\,x_2 + 51\,x_3 + 22\,x_4 \le 120 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}. \end{array}$$

Vis at enhver optimal løsning til det generelle knapsack problem $(*)$ er halemaksimal.

OPGAVE 6

Lad $(x_1, \ldots, x_n)$ være en brugbar løsning og antag at

$$\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \cdots \geq \frac{c_n}{a_n}$$

i det generelle knapsack problem $(*)$. Vis at

$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \;\leq\; c_1x_1 + \cdots + c_kx_k + \frac{c_{k+1}}{a_{k+1}}(b - (a_1x_1 + \cdots + a_kx_k)),$$

hvor $1 \leq k \leq n-1$. Gør rede for hvordan dette resultat kan bruges til at effektivisere søgningen efter en optimal løsning i de halemaksimale brugbare løsninger. Benyt knapsack problemet fra Opgave 5 til at illustrere metoden.

OPGAVE 7

Gør kort rede for (igen i eget sprog, ikke bogens!) den skitserede metode i §6.2 i ILO til at gennemføre simplex algoritmen uden eksplicit at kende søjlerne i problemet. Illustrer denne "column generation" metode ved at vise udregningerne i simplex algoritmen ud fra den oplagte brugbare løsning bestående af de 4 udskæringsmønstre

$$\begin{gathered}(1,0,0,0)\\(0,1,0,0)\\(0,0,1,0)\\(0,0,0,1)\end{gathered}$$

i forbindelse med det lineære program formuleret i Opgave 2.